

УДК 517.938.5

**Локальное моделирование бильярдами слоений Лиувилля: реализация реберных инвариантов.****В. В. Ведюшкина<sup>1</sup>**

В работе изложена локальная гипотеза А.Т. Фоменко о возможности моделирования слоений Лиувилля интегрируемыми бильярдами. Доказан расширенный вариант ее положения о числовых инвариантах на ребре инварианта Фоменко–Цишанга слоения Лиувилля. Показана реализация подходящим классом бильярдных слоения Лиувилля для некоторых комбинаций значений меток на фиксированном ребре.

*Ключевые слова:* интегрируемые гамильтоновы системы, слоение Лиувилля, бифуркационная диаграмма, топологические инварианты, инвариант Фоменко–Цишанга.

The local case of A. Fomenko conjecture on the possibility of modeling Liouville foliations by integrable billiards. An extended version of its statements on numerical invariants on the edge of the Fomenko-Zieschang invariant of the Liouville foliation is proved. We show the realization the Liouville foliation for some combinations of marks values on a fixed edge by appropriate class of the integrable billiards.

*Key words:* integrable system, billiard, Liouville equivalence, Fomenko–Zieschang invariant.

В работе [1] А.Т. Фоменко выдвинул фундаментальную гипотезу о моделировании (реализации) бильярдами интегрируемых систем с двумя степенями свободы. В настоящей работе мы анализируем раздел  $C$  этой гипотезы.

**Гипотеза  $C$  (реализация меченых молекул).** Широкий класс инвариантов Фоменко–Цишанга (т.е. меченых молекул [2], задающих с точностью до лиувиллевой эквивалентности множество всех интегрируемых систем), которые моделируются интегрируемыми бильярдами. Тем самым, для многих невырожденных интегрируемых систем их слоения Лиувилля на инвариантных трехмерных поверхностях (возможно, все такие слоения) послойно гомеоморфны слоениям интегрируемых бильярдных систем из подходящего класса.

В данный момент эта гипотеза доказана для большого числа интегрируемых гамильтоновых систем, известных в математической физике, механике и геометрии. В частности, для многих классических случаев интегрируемости в динамике твердого тела (например, для многих зон энергии случаев Эйлера, Лагранжа, Ковалевской, Горячева–Чаплыгина, Клебша, Соколова, Стеклова, Ковалевской–Яхьи и др.), см. [3, 4]. Гипотеза  $C$  также доказана В.В. Ведюшкиной и А.Т. Фоменко для всех интегрируемых при помощи линейных и квадратичных интегралов геодезических потоков на ориентированных замкнутых двумерных поверхностях, т.е. для потоков на торе и на сфере, см. [5].

В работе [1] В.В. Ведюшкиной и А.Т. Фоменко были описаны восемь классов I–VIII интегрируемых бильярдных систем, с помощью которых можно доказывать гипотезу  $C$ . В частности, элементарные бильярды, топологические бильярды, бильярдные книжки, бильярды на плоскости Минковского, геодезические бильярды на квадраках в трехмерном евклидовом пространстве, бильярды с потенциалом, бильярды в магнитном поле, а так же класс, их все объединяющий. Как было показано в этой работе, например, в классе бильярдных книжек, обнаружили топологические препятствия к реализуемости “скрученного волчка Лагранжа” для одной из зон энергии. Тем не менее,

<sup>1</sup>Ведюшкина Виктория Викторовна — канд. физ.-мат. наук, ассист. каф. дифференциальной геометрии и приложений мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: arinir@yandex.ru.

Vedyushkina Viktoria — candidate of physical and mathematical sciences, assistant, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Differential Geometry and Application.

оказалось, что эта система все-таки реализуется, но в другом классе, магнитных бильярдов. В качестве естественного класса плоских интегрируемых бильярдов рассматриваются бильярды, ограниченные дугами софокусных квадрик. Такие бильярды называются в работах В.В.Ведюшкиной элементарными. Их интегрируемость эквивалентна малой теореме Понселе: любая траектория такого бильярда лежит на прямых, касательных к некоторой квадрике — эллипсу или гиперболе — софокусных с квадриками, образующими границу бильярда (см. книгу [6]). Топологические бильярды и бильярдные книжки получаются склейками таких бильярдов вдоль сегментов их границ. Если вдоль граничного сегмента склеено больше двух элементарных бильярдов-листов (случай бильярдной книжки), то этому ребру склейки необходимо приписать перестановку, которая определяет порядок перехода бильярдной частицы с одного бильярда на другой при ударе об это ребро склейки. Очевидно, что бильярдные книжки, также как и элементарные бильярды, интегрируемы с той же парой интегралов.

Таким образом, вопрос о справедливости гипотезы Фоменко  $C$  в полном объеме пока неясен. В связи с этим А.Т. Фоменко сформулировал “локальный” вариант гипотезы  $C$ , являющийся “максимальным упрощением” общей гипотезы  $C$ . Напомним, что инварианты Фоменко–Цишанга, классифицирующие невырожденные интегрируемые системы на трехмерных инвариантных многообразиях — это одномерные графы с вершинами-атомами и некоторыми числовыми метками. Атомы кодируют бифуркации торov Лиувилля вблизи особых слоев слоений Лиувилля.

Числовые метки  $r, \varepsilon, n$  устроены так. Метка  $r < |1|$  — рациональное число, характеризующее “тип скрученности” торov Лиувилля внутри однопараметрического семейства торov, отвечающих данному ребру молекулы. Метки  $\varepsilon$ , равные  $\pm 1$ , стоят на каждом ребре молекулы и связаны с взаимной ориентацией критических окружностей дополнительного интеграла системы и ориентацией многообразия. Метка  $n$  является целым числом и приписана к некоторым подграфам молекулы, называемых “семьями”. После разрезания молекулы по всем ребрам с конечными метками  $r$ , молекула превращается в несвязное объединение подграфов, на всех ребрах которых стоят метки  $r = \infty$ . Семьями называются те из этих подграфов, все вершины которых являются седловыми атомами (т.е. не имеющих минимаксных атомов  $A$ ). Другими словами, трехмерное подмногообразие, соответствующее семье в инвариантном 3-многообразии  $Q$ , является многообразием Зейферта. В том случае, когда атомы, входящие в состав данной семьи не имеют звездочек — иначе говоря их слоение Зейферта не содержит особых слоев типа (2,1) — то целочисленная метка  $n$  интерпретируется как характеристический класс Эйлера указанного расслоения Зейферта. Более подробно определение и свойства меток  $r, \varepsilon, n$  см. [2, 7–9].

**Локальная гипотеза А.Т. Фоменко  $C$  (реализация числовых инвариантов интегрируемых систем).**

1. Пусть  $\gamma$  — произвольное ребро с метками  $r, \varepsilon$  некоторой меченой молекулы  $W^*$ . Тогда существует бильярд из указанных выше классов I–VIII, реализующий такую комбинацию чисел  $r, \varepsilon$  на одном из ребер своей меченой молекулы.

Отметим, что имеются следующие четыре варианта: метка  $r = p/q$  конечна, и  $\varepsilon = \pm 1$ ; метка  $r = \infty$ , и  $\varepsilon = \pm 1$ .

2. (усиление пункта 1) В условиях пункта 1 существует подходящий бильярд, реализующий произвольную пару меток  $r$  и  $\varepsilon$  на ребре между любыми, наперед заданными атомами.

3. Пусть  $S$  — семья с целочисленной меткой  $n$  в некоторой меченой молекуле  $W^*$  интегрируемой системы. Тогда существует бильярд из указанных выше классов I–VIII, реализующий некоторую семью с точно такой же целочисленной меткой  $n$ .

4. (усиление пункта 3) В условиях пункта 2 существует подходящий бильярд, реализующий не только данную метку  $n$ , но и саму семью, т.е. граф с нужными атомами и нужным набором ребер.

5. (реализация меченой окрестности любой семьи) Пусть  $S$  — семья с целочисленной меткой  $n$  в некоторой меченой молекуле, причем внешние ребра  $\gamma_i$  семьи оснащены произвольными метками  $r_i, \varepsilon_i$ . Тогда существует подходящий бильярд, реализующий такой меченый подграф в своей меченой молекуле.

Анализу и частичному доказательству первого пункта этой гипотезы посвящена данная работа.

**Реализация бильярдами реберных инвариантов  $r, \varepsilon$ .**

**Теорема 1.** *Гипотеза А.Т. Фоменко  $C_1$  для любой пары числовых инвариантов  $r, \varepsilon$  верна, а именно, для любого ребра меченой молекулы  $W^*$  с такой парой меток существует бильярд, меченая молекула которого содержит ребро с этой же парой меток.*

**Замечание 1.** При изменении ориентации изоэнергетической поверхности  $Q^3$  меняются допустимые системы координат. В результате метки, стоящие на ребрах, изменятся по описанным ниже правилам (см. [7]).

1) Ребро соединяет атомы одного типа, т. е. либо  $A$  с  $A$ , либо седло с седлом. Здесь в случае конечного ребра, т.е. когда  $\beta \neq 0$  метки  $r$  и  $\varepsilon$  меняют знаки. В случае же бесконечного ребра, т. е. когда  $\beta = 0$ , метки  $r$  и  $\varepsilon$  не меняются.

2) Ребро соединяет атомы разных типов, т.е. атом  $A$  с седлом. Здесь в случае конечного ребра метка  $r$  меняет знак, а метка  $\varepsilon$  не меняется. В случае бесконечного ребра наоборот: метка  $r$  не меняется (равна бесконечности), а метка  $\varepsilon$  меняет знак.

**Теорема 2.** Гипотеза А.Т. Фоменко  $C_2$  верна для случаев, указанных в таблице 1. Более точно, в семи случаях подходящими бильярдами удастся реализовать все пары  $r, \varepsilon$  числовых меток для ребер, на концах которых находятся любые наперед заданные атомы. В четырех оставшихся случаях удалось пока реализовать любые комбинации меток для ребер, соединяющих лишь конкретные атомы из серий  $B$  и  $C$ .

метки	$A - A$	$A - V$	$V_1 - V_2$
$r = p/q,$ $\varepsilon = 1$	см. [12]	$V = B$	см. [5] $V_1 = C_k, V_2 = C_n$
$r = p/q,$ $\varepsilon = -1$	см. [12]	—	см. [5] $V_1 = C_k, V_2 = C_n$
$r = \infty,$ $\varepsilon = 1$	см. [11] и Предл. 7.1, [5]	см. [10] алгоритм Ведюшкиной-Харчевой	алгоритм Ведюшкиной-Харчевой для грубых молекул
$r = \infty,$ $\varepsilon = -1$	см. [11]	см. [10] алгоритм Ведюшкиной-Харчевой	см. Предл. 7.2, [5], $V_1 = V_2 = B_n$

Таблица 1: Случаи реализации комбинаций меток  $r$  и  $\varepsilon$  в молекулах Фоменко–Цишанга интегрируемых бильярдов.

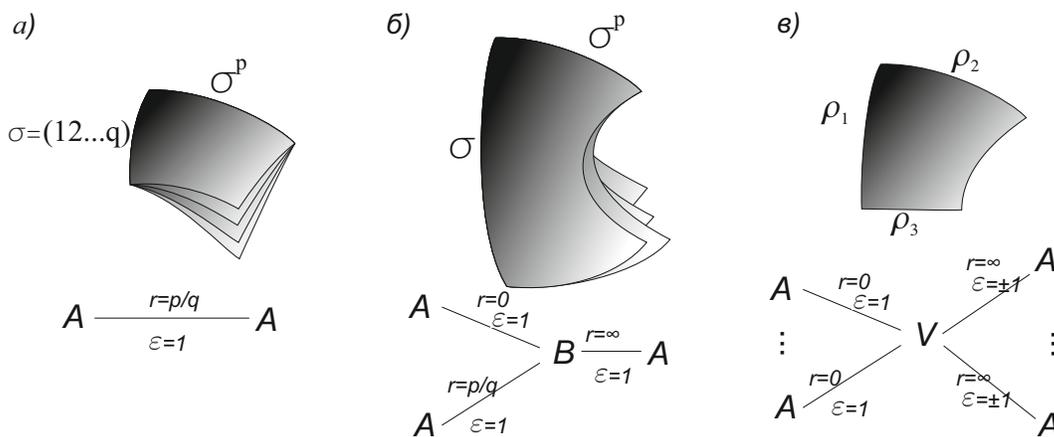


Рис. 1: Случаи реализации комбинаций меток  $A \frac{r = p/q}{\varepsilon = \pm 1} A(a)$ ,  $A \frac{r = p/q}{\varepsilon = +1} B(б)$  и  $V \frac{r = \infty}{\varepsilon = \pm 1} A(в)$ , в молекулах Фоменко–Цишанга интегрируемых бильярдов.

**Доказательство.** Случай  $P_1 \frac{r = p/q}{\varepsilon = \pm 1} P_2$ , где метки стоят на ребре, соединяющие атомы одного типа. Если эти атомы имеют тип  $A$ , то для реализации подойдет бильярдная книжка, одинаковые листы которой ограничены дугами эллипсов и гипербол и не пересекаются с фокальной прямой (см. рис. 1, а). На выпуклом гиперболическом ребре при этом стоит перестановка  $\sigma = (1\ 2 \dots q)$ ,

а на выпуклом эллиптическом — перестановка  $\sigma^p$ . В случае двух седловых атомов, такая метка была реализована бильярдной книжкой, моделирующей слоение Лиувилля интегрируемого геодезического потока на торе с квадратичным интегралом, не сводящимся к линейному (см. работу В.В. Ведюшкиной, А.Т. Фоменко [?]). В этом случае атомы  $P_1$  и  $P_2$  это атомы серии  $C_n$ . Отметим, что так как слоения этих бильярдов реализуют любую метку  $r$ , то для получения другого знака метки  $\varepsilon$  при данной  $r$  необходимо реализовать метку  $\tilde{r} = 1 - r$ , а затем изменить ориентацию  $Q^3$ .

Случай  $A \frac{r = p/q}{\varepsilon = +1} V$ . Для реализации рассмотрим бильярдную книжку, одинаковые листы которой ограничены дугами эллипсов и гипербол и содержат часть отрезка фокальной прямой между фокусами (см. рис. 1, б). Здесь, как и выше, гиперболическому выпуклому ребру необходимо сопоставить перестановку  $\sigma$ , и эллиптическому — перестановку  $\sigma^p$  (см. [12]). В этом случае ребро будет соединять атомы  $A$  и  $B$ . Остается открытым вопрос, может ли вместо атома  $B$  быть другой седловой атом. В случае положительного ответа интересно было бы описать класс всех таких атомов.

Случай  $A \frac{r = \infty}{\varepsilon = +1} A$  реализуется элементарным бильярдом, ограниченным двумя концентрическими окружностями. Случай  $A \frac{r = \infty}{\varepsilon = -1} A$  реализуется этим же бильярдом в присутствии магнитного поля. Любая траектория такого бильярда состоит из дуг окружностей, центры которых лежат на другой, фиксированной окружности. При этом радиус окружностей, дуги которых составляют траекторию играет роль энергии системы, а радиус окружности центров — дополнительного интеграла. При этом окружности центров и окружностей, образующих границу бильярда совпадают. Согласно результату В.В. Ведюшкиной и С.С. Пустовойтова если окружность центров целиком лежит в области, ограниченной меньшей граничной окружностью бильярда, то тогда поверхность уровня дополнительного интеграла классифицируется слоением Лиувилля с молекулой  $A \frac{r = \infty}{\varepsilon = -1} A$  (см. [11]).

Случаи  $A \frac{r = \infty}{\varepsilon = \pm 1} V$  могут быть реализованы для любого атома  $V$ . Рассмотрим бильярдную книжку, слоение Лиувилля которой реализует атом  $V$ , построенную по алгоритму В.В. Ведюшкиной и И.С. Харчевой [10]. Эта бильярдная книжка склеена из бильярдов, ограниченных двумя дугами гипербол (одна из них выпуклая), эллипсом и фокальной прямой (см. рис. 1, в). На всех нестрогих выпуклых границах при этом стоят некоторые перестановки  $\rho$ , определяемые по атому  $V$  однозначно. Торы, соответствующие траекториям, лежащим на прямых, касательных к гиперболам, в молекуле Фоменко–Цишанга, классифицирующей слоение Лиувилля этого бильярда, расположены между атомом  $V$  и атомами  $A$ . При этом на таких ребрах метка  $r = \infty$ , а метка  $\varepsilon$  зависит от ориентации и может принимать как положительные так и отрицательные значения (на всех бесконечных ребрах при этом один и тот знак).

Случай  $V_1 \frac{r = \infty}{\varepsilon = 1} V_2$  реализуется для любых седловых атомов. Возьмем интегрируемую бильярдную книжку сопоставленную инварианту Фоменко (грубой молекуле) по алгоритму В.В. Ведюшкиной и И.С. Харчевой для грубых молекул. Тогда все седловые атомы образуют одну большую семью, где метки  $\varepsilon = 1$  на всех ребрах внутри этой семьи.

Случай  $V_1 \frac{r = \infty}{\varepsilon = -1} V_2$  реализуется для двух одинаковых седловых атомов, принадлежащих серии  $B_n$ , например в молекуле, описывающей топологию слоения Лиувилля интегрируемого геодезического потока на двумерной сфере с линейным интегралом. Такая система лиувиллево эквивалентна подходящему бильярду, склеенному из областей, ограниченных концентрическими окружностями см. [5]. Следовательно, этот бильярд позволяет реализовать случай ребра с такими метками. Теорема доказана.

**Замечание** Отметим, что пока неясен вопрос о возможности реализации случаев  $V \frac{r = \infty}{\varepsilon = -1} V$  и  $A \frac{r = p/q}{\varepsilon = 1} V$  для любых седловых атомов. При этом случай  $A \frac{r = p/q}{\varepsilon = -1} V$  до сих пор не встречался в

интегрируемых бильярдах, хотя он встречается в динамике твердого тела (например, случай Жуковского о движении гиростата в поле силы тяжести, см. [7]). Дело в том, что для него характерно противоположное направление критических траекторий на седловом атоме  $V$  и минимаксном атоме  $A$ , что в классах I-VIII пока не встречалось.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 17-11-01303) в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ведюшкина В.В., Фоменко А.Т.* Бильярды и интегрируемость в геометрии и физике. Новый взгляд и новые возможности // Вестн. Моск. Унив., Серия Матем. и Мех. 2019. **3**. 15–25.
2. *Фоменко А.Т., Цишанг Х.* Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы // Изв. АН СССР. Матем., 1990. **54**, №3. 546–575.
3. *Ведюшкина В.В., Фоменко А.Т.* Интегрируемые топологические бильярды и эквивалентные динамические системы // Изв. РАН. Серия матем., 2017. **81**, №4. 20–67
4. *Фокичева В.В., Фоменко А.Т.* Интегрируемые бильярды моделируют важные интегрируемые случаи динамики твердого тела // ДАН, 2015. **465**, №2. 150–153
5. *Ведюшкина В.В., Фоменко А.Т.* Интегрируемые геодезические потоки на ориентируемых двумерных поверхностях и топологические бильярды // Изв. РАН. Серия матем., 2019. **83**, №5. 3–43
6. *Козлов В.В., Трещев Д.В.* Генетическое введение в динамику систем с ударами. М.: Изд-во МГУ, 1991.
7. *Болсинов А.В., Фоменко А.Т.* Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Т.1,2, Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 1999.
8. *Фоменко А.Т., Цишанг Х.* О типичных топологических свойствах интегрируемых гамильтоновых систем // Изв. АН СССР, 1988. **52**, №2. 378–407.
9. *Фоменко А.Т.* Симплектическая топология вполне интегрируемых гамильтоновых систем // Успехи матем. наук, 1989. 44 (265), №5. 145–173.
10. *Ведюшкина В.В., Харчева И.С.* Бильярдные книжки моделируют все трехмерные бифуркации интегрируемых гамильтоновых систем // Матем. сб., 2018. **209**, №12. 17–56.
11. *Fomenko A.T., Vedyushkina V.V.* Implementation of integrable systems by topological, geodesic billiards with potential and magnetic field // Journal of mathematical physics, 2019. **26**, №3. 320–333.
12. *Ведюшкина В.В.* Интегрируемые бильярды реализуют торические слоения на линзовых пространствах и 3-горе // Матем. сб., 2020. **211**, №1.

Поступила в редакцию  
26.09.2019